

2º Bach. Física - Ejercicios- Herramientas matemáticas (I) : A. Dimensional / C. Vectorial

1.- Demostrar que la siguiente ecuación para la energía mecánica de un satélite en una órbita circular es dimensionalmente incorrecta :

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M m}{r^2}$$

* Con : m y M (masas) , v (velocidad orbital) , r (radio orbital), G (constante LGU, ver ej. 16)

2.- La velocidad media del agua que circula por un canal abierto puede calcularse mediante la expresión :

$$v = F_r \sqrt{g \frac{A}{D}}$$

, siendo A el área de la sección transversal del canal, D la anchura del canal y F_r un

parámetro llamado *número de Froude*.

* Demostrar mediante el análisis dimensional que F_r es un número sin dimensiones.

3.- La altura que, por capilaridad, alcanza una columna de agua en un tubo vertical abierto, se calcula con la *Ley de Jurin*, que establece que dicha altura es directamente proporcional a la tensión superficial del líquido (N/m) e inversamente proporcional a la aceleración de la gravedad, la densidad del líquido y el radio del tubo capilar.

* Obtener, mediante el cálculo dimensional, la ecuación de la *Ley de Jurin*.

4.- Un vector tiene como origen el punto $O(-1, 2, 0)$ y como extremo el punto $P(3, -1, 2)$

a) Calcular las componentes y el módulo del vector \vec{OP}

b) Hallar un vector unitario en la dirección y sentido de \vec{OP}

5.- Tres fuerzas aplicadas en el mismo punto tienen módulos 6 N, 3 N y 4 N respectivamente y forman los siguientes ángulos con el eje OX : 45° , 30° y -60° .

Calcular la fuerza resultante (módulo, ángulo y componentes) teniendo en cuenta que las tres iniciales son coplanarias.

6.- Dados los vectores $\vec{u}(1, -1, 2)$; $\vec{v}(-1, 3, 4)$. Calcular :

a) El producto escalar de ambos vectores y el ángulo que forman entre ellos.

b) El producto vectorial. Comprobar que es perpendicular a ambos vectores

7.- Determinar el valor de m para que los vectores $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + m\vec{k}$ y $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ sean perpendiculares.

8.- Dado el vector $\vec{v} = A(\cos \omega t \vec{i} + \text{sen } \omega t \vec{j})$ donde A y ω son constantes y t es la variable escalar independiente, calcular :

a) El módulo del vector y la derivada del módulo

b) La derivada del vector y el módulo de la derivada

Ejercicios - Herramientas matemáticas (II) : C. Algebraico

9.- Calcular el módulo de la resultante de dos fuerzas perpendiculares (\vec{F}_1, \vec{F}_2) en los siguientes casos :

a) El módulo de la primera fuerza es el doble que el de la segunda

b) El módulo de la primera fuerza es la mitad que el de la segunda

c) $|\vec{F}_1| = 2a$; $|\vec{F}_2| = \frac{a}{3}$

10.- Dos cargas eléctricas q_1 y q_2 se encuentran situadas en los puntos $A:(-1,4)$ y $B:(2,-3)$ respectivamente. Calcular :

a) La distancia de cada carga al origen de coordenadas

b) La distancia entre las cargas

c) La distancia de cada carga al punto $P:(-1,-1)$

11.- Calcular la superficie, el volumen y la densidad de una esfera homogénea de 250 cm de diámetro y una masa de 5 toneladas. Expresar los resultados en el S.I. con notación científica.

* *Ampliación* : Calcular las mismas magnitudes si la esfera tiene una cavidad concéntrica hueca de 100 cm de diámetro, obtenida al eliminar la correspondiente masa de la esfera original.

12.- Calcular la cantidad de materia necesaria para formar un cilindro homogéneo de 0,3 m de radio, una altura de 80 cm y una densidad de 1,5 g/cm³. ¿Cuál será la superficie del cilindro ?

* *Ampliación* : ¿Qué cantidad de materia sería necesaria para un cilindro de diámetro el doble que el original, si se mantienen iguales las demás magnitudes?

Expresar los resultados en el S.I. con notación científica.

13.- Dadas dos partículas de masas m_1 y m_2 , calcular la relación que existe entre los módulos de los momentos lineales de las partículas y entre las energías cinéticas de ambas, sabiendo que se desplazan con velocidades cuya relación es : $v_1 = \sqrt{5} v_2$

* *Datos* : *Momento lineal* $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$; *Energía cinética* $E_c = \frac{1}{2} m v^2$

14.- Calcular la relación que existe entre los volúmenes y entre las densidades de dos cuerpos esféricos de masas : m_1, m_2 y diámetros : D_1, D_2 sabiendo que $m_1 = 3 m_2$ y $D_2 = \frac{4}{3} D_1$

15.- Dadas las magnitudes : $m = 250$ g , $t = 0,1$ min , $v_0 = 8$ m/s , $v_1 = 20$ m/s , calcular en el Sistema Internacional las siguientes, que se obtienen a partir de las primeras : E_{c1} , a , F , W

* *Datos* : $E_{c1} = \frac{1}{2} m v_1^2$, $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, $v_1 = v_0 + a t$, $x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$, $W = F \cdot x$

16.- Calcular en el S.I. las siguientes magnitudes, utilizando notación científica :

a) Fuerza media de atracción entre la Tierra y Marte :

$$F = G \frac{m_T m_M}{d_{TM}^2} , \text{ Datos : } G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} , m_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} , m_M = 6,5 \cdot 10^{23} \text{ kg} , d_{TM} = 80 \cdot 10^6 \text{ km}$$

b) Energía en reposo del protón, expresando el resultado en Julios y electronvoltios (eV)

$$E = m_p c_0^2 , \text{ Datos : } m_p = 1,67 \cdot 10^{-21} \text{ mg} , c_0 = 299,8 \cdot 10^3 \text{ km/s} , 1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Ejercicios - Herramientas matemáticas (III) : Repaso de Mecánica

17.- La ecuación de la posición de un móvil es : $x(t) = x_0 + v_0 t - 2,5 t^2$, con todas las unidades en S.I.

a) Obtener las ecuaciones de la velocidad y de la aceleración

b) Hallar la posición inicial y la velocidad inicial, sabiendo que : $t = 1 \text{ s} \rightarrow v(1) = 3,5 \text{ m/s} ; x(1) = 20 \text{ m}$

c) Hallar en qué instante se encontrará el móvil en el origen de coordenadas

d) *Representar gráficamente* la posición, velocidad y aceleración del móvil en función del tiempo.

18.- Un móvil se desplaza en el plano XY según la ecuación : $\vec{r}(t) = (5 + 2t) \vec{i} + 3(1 - t^2) \vec{j}$ (unidades S.I.)

a) Obtener las ecuaciones de la velocidad y de la aceleración

b) Hallar los valores iniciales de la posición, la velocidad y la aceleración

c) Clasificar el movimiento y *representar gráficamente* la trayectoria.

19.- Desde el borde superior del cráter Aristarco, situado a 2 km sobre el suelo de la Luna, se lanza una sonda con una velocidad inicial v_0 con un ángulo de 45º con la horizontal. Dato : $g_L = 1,6 \text{ m/s}^2$

a) Escribir las ecuaciones del movimiento de la sonda

b) Hallar cuánto debe valer la velocidad inicial, para que la sonda alcance una altura máxima de 8 km sobre el borde del cráter

c) Calcular a qué distancia horizontal del punto de lanzamiento caerá la sonda y su tiempo de vuelo

20.- La siguiente ecuación vectorial representa la posición de un móvil que se desplaza en el espacio XYZ con origen de coordenadas en (0,0,0): $\vec{r}(t) = 3t^2\vec{i} + (1-5t)\vec{j} + (2-3t^2)\vec{k}$ (unidades S.I.)

- Obtener la posición del móvil en los instantes $t = 0$ y $t = 2$
- Calcular la distancia al origen de coordenadas en los instantes $t = 0$ y $t = 2$
- Hallar el desplazamiento del móvil entre los instantes $t = 0$ y $t = 2$, así como la distancia que existe entre las posiciones del móvil en esos dos instantes.
- Obtener la ecuación de la velocidad instantánea del móvil y calcular el módulo de esa velocidad en los instantes $t = 0$ y $t = 2$. ¿Cuál es el incremento de la velocidad entre ambos instantes?
- Hallar la aceleración media del móvil en el intervalo $t = 0$ a $t = 2$
- Obtener la ecuación de la aceleración instantánea del móvil y clasificar el movimiento

21.- Un móvil se desplaza en una trayectoria circular, con centro en el origen de coordenadas y partiendo del punto (1,1) girando de forma constante a razón de 800 vueltas por minuto.

- Obtener las ecuaciones del movimiento en coordenadas angulares
- Hallar la aceleración lineal, indicando las componentes intrínsecas de la misma.
- Obtener la ecuación de la posición en coordenadas cartesianas

22.- Un cuerpo de 160 kg de masa es impulsado sobre un plano horizontal desde el reposo por una fuerza constante de 300 N que forma un ángulo de 30° con el plano, siendo el coeficiente de rozamiento dinámico entre el cuerpo y el plano: $\mu = 0,1$

- Calcular la aceleración que adquiere el cuerpo y su velocidad cuando ha recorrido 25 m
- Calcular el trabajo realizado por la fuerza impulsora, el realizado por la fuerza de rozamiento y el incremento de la energía cinética del cuerpo en ese recorrido

$$\text{Dato: } g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$$

23.- La ecuación de la posición de un móvil que se desplaza en el eje X es: $x(t) = 5 \sin(2t - \pi/2)$ (S.I.)

- Obtener las ecuaciones de la velocidad y de la aceleración
- Hallar los valores máximos de la velocidad y de la aceleración
- Hallar en qué instantes alcanzará el móvil su máxima velocidad
- Representar gráficamente la posición en función del tiempo $t = m \cdot \pi$ (con $m = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \dots$)

24.- La ecuación del movimiento vertical de un móvil viene dada por: $y(t) = 10e^{-0,1t} - 2$ (S.I.)

- Obtener las ecuaciones de la velocidad y de la aceleración
- Hallar los valores iniciales de la posición, la velocidad y la aceleración
- Calcular en qué instante pasará el móvil por el origen de coordenadas y en qué instante la velocidad del móvil se habrá reducido a la cuarta parte de la inicial