1.- Un satélite artificial de 500 kg de masa se mueve alrededor de un planeta, describiendo una órbita circular de 42,47 horas y un radio de 419.000 km. Se pide:

a) Fuerza gravitatoria que actúa sobre el satélite

b) La energía cinética, la energía potencial y la energía total del satélite en su órbita.

c) Si por cualquier causa, el satélite duplica repentinamente su velocidad sin cambiar la dirección, ¿se alejará este indefinidamente del planeta? Razonar la respuesta.

a) No podemos aplicar directamente la fórmula que proporciona la Ley de la Gravitación Universal ya que no conocemos la masa del planeta (M), pero sabemos que para que un cuerpo se mantenga en una órbita el valor de su fuerza centrípeta debe coincidir con el valor de la fuerza dada por la ley de la Gravitación Universal.

Para realizar los cálculos debemos escribir todas las magnitudes que manejamos en unidades del sistema internacional.

$$T = 42{,}72\,\text{h} = 42{,}72\,\text{h}\cdot 3600\,\text{s/h} = 152892\,\text{s}$$

$$r = 419000\,\text{km} = 4{,}19\cdot 10^8\,\text{m}$$

Igualamos las fuerzas:

$$F_G = F_c \qquad G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

Calculamos el valor de la velocidad a partir del radio de la órbita y el periodo.

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\cdot 4{,}19\cdot 10^8}{152892} = 17219\,\text{m/s}$$

De modo que el valor de la fuerza gravitatoria es:

$$F_G = m\frac{v^2}{r} = 300\cdot\frac{(17219)^2}{4{,}19\cdot 10^8} = 212{,}3\,\text{N}$$

b) Como desconocemos el valor de la expresión GM, lo escribimos en función de la velocidad y el radio de la órbita:

$$G\frac{M\cancel{m}}{r^2} = \cancel{m}\frac{v^2}{r} \qquad GM = v^2 r$$

$$\left.\begin{aligned} E_C &= \frac{1}{2}mv^2 = 4{,}45\cdot 10^{10}\,\text{J} \\ E_P &= -G\frac{Mm}{r} = -\frac{v^2 m\cancel{r}}{\cancel{r}} = -8{,}9\cdot 10^{10}\,\text{J} \end{aligned}\right\} \quad E_T = -G\frac{Mm}{2r} = -\frac{v^2 m\cancel{r}}{2\cancel{r}} = -4{,}45\cdot 10^{10}\,\text{J}$$

c) Vamos a comparar los valores de la velocidad, la energía cinética y la energía total en el caso de que el satélite duplique su velocidad.

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}; \qquad\qquad 2v = 2\cdot\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$E_{C(v)} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}; \qquad\qquad E_{C(2v)} = \frac{1}{2}m(2v)^2 = 2G\frac{Mm}{r}$$

Sumando el valor de la energía cinética al de la potencial obtenemos la energía total:

$$E_T = 2G\frac{Mm}{r} - G\frac{Mm}{r} = G\frac{Mm}{r}$$

Que como tiene un valor positivo corresponde a una hipérbola (orbita abierta). De modo que el satélite se puede alejar indefinidamente del planeta ya que la energía adquirida es capaz de superar el potencial que lo mantiene ligado al planeta.

2.- Se eleva un objeto de masa *m* = 20 kg desde la superficie de la Tierra hasta una altura *h* = 100 km.

a) ¿Cuánto pesa el objeto a esa altura?
b) ¿Cuánto ha incrementado su energía potencial?

a) Calculamos el peso a partir de la expresión de la fuerza que nos proporciona la ley de la gravitación universal utilizando como distancia

La distancia del objeto al centro de la Tierra es:

$$h = 100\,\mathrm{km} \quad \Rightarrow \quad R = R_T + h = 6370 + 100 = 6470\,\mathrm{km} = 6{,}47\cdot 10^6\ \mathrm{m}$$

$$P = F = G\frac{Mm}{R^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 20}{\left(6{,}47\cdot 10^6\right)^2} = 190{,}6\,\mathrm{N}$$

Su peso pasa de ser en la superficie de la tierra P = 20·9,8 = 196 N a ser 190,6 N

b) La energía potencial en cualquier punto que se encuentre a una distancia R del centro de un cuerpo de masa M es:

$$E_P = -G\frac{Mm}{R}$$

Luego el incremento de energía que sufre el cuerpo es:

$$\Delta E_P = E_{Pf} - E_{P0} = -G\frac{Mm}{R_f} - G\frac{Mm}{R_0} = GMm\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_f}\right) =$$

$$= GMm\left(\frac{R_f - R_0}{R_0 R_f}\right) = 19355897\,\mathrm{J} \approx 1{,}93\cdot 10^7\ \mathrm{J}$$

3.- La estación espacial internacional (ISS) describe alrededor de la Tierra una órbita prácticamente circular a una altura h = 390 km sobre la superficie terrestre, siendo su masa m = 415 toneladas.

a) Calcular su periodo de rotación en minutos así como la velocidad con la que se desplaza
b) ¿Qué energía se necesitaría para llevarla desde su órbita actual a otra con una altura doble?¿Cuál sería el periodo de rotación en esta nueva órbita?

a) El radio de la órbita por la que circula la estación espacial es:

$$h = 390\,\text{km} \quad \Rightarrow \quad R = R_T + h = 6370 + 390 = 6760\,\text{km} = 6{,}76\cdot10^6\ \text{m}$$

Calculamos la velocidad de un cuerpo en una órbita alrededor de la Tierra igualando la fuerza centrípeta a la de atracción gravitatoria.

$$F_c = F_G; \qquad m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{G\frac{M}{R}}$$

$$v = \sqrt{6{,}67\cdot10^{-11}\frac{5{,}98\cdot10^{24}}{6{,}76\cdot10^6}} = 7681{,}4\,\text{m/s}$$

El periodo es el tiempo que tarda en dar una vuelta completa:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi\cdot6{,}76\cdot10^6}{7681{,}4} = 5529{,}5\,\text{s} \approx 1\text{h}\,32\,\text{min}$$

b) El radio de la órbita con altura doble que la inicial será:

$$R_f = 6760 + 390 = 7150\,\text{km} \approx 7{,}15\cdot10^6\ \text{m}$$

La energía en una órbita la calculamos como la suma de la energía cinética más la potencial.

$$E_0 = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{R} - G\frac{Mm}{R} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{R}$$

Para llevarla desde la órbita inicial R_0 hasta la final R_f el consumo energético es:

$$\Delta E = E_f - E_0 = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{R_f} - \frac{1}{2}G\frac{Mm}{R_0} = \frac{1}{2}GMm\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_f}\right) = \frac{1}{2}GMm\left(\frac{R_f - R_0}{R_0R_f}\right)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot4{,}15\cdot10^5\left(\frac{7{,}15\cdot10^6 - 6{,}76\cdot10^6}{7{,}15\cdot10^6\cdot6{,}76\cdot10^6}\right) = 6{,}68\cdot10^{11}\ \text{J}$$

El periodo de rotación en la nueva órbita se calcula a partir de la velocidad en la misma.

$$v = \sqrt{6{,}67\cdot10^{-11}\frac{5{,}98\cdot10^{24}}{7{,}15\cdot10^6}} = 7469\ \text{m/s};$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi\cdot6{,}76\cdot10^6}{7469} = 6015\,\text{s} \approx 1\text{h}\,40\,\text{min}$$

4.- Dos satélites idénticos A y B describen órbitas circulares de diferente radio ($R_A > R_B$) alrededor de la Tierra. Contestar razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál de los dos tiene mayor energía cinética?
b) Si los dos satélites estuvieran en la misma órbita ($R_A = R_B$) y tuviesen distinta masa ($m_A < m_B$), ¿cuál de los dos se movería con mayor velocidad?; ¿cuál de ellos tendría más energía cinética?

a) Escribimos en primer lugar el valor de la energía cinética de un cuerpo en una órbita en función de su radio.

$$F_G = F_c \qquad G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}; \qquad v_O = \sqrt{G\frac{M_T}{r}}$$

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mG\frac{M_T}{r} = G\frac{M_T m}{2r}$$

Como la energía es inversamente proporcional al radio podemos concluir que cuanto más grande sea el radio de la órbita del planeta, menor será el valor de su energía cinética.
El satélite con mayor energía cinética es el B porque $R_A > R_B$.

b) De la expresión de la velocidad de un satélite en una órbita v_O se puede deducir que ésta depende del radio de la órbita, pero no de la masa de los satélites. Como en esta caso el radio de la órbita es el mismo para los dos satélites, ambos tendrán la misma velocidad.

El caso de la energía cinética es diferente puesto que si depende de la masa "m" de los satélites (como se puede ver en la expresión anterior). De este modo tendrá mayor energía cinética el satélite B que tiene mayor masa.

5. Un satélite artificial de 1000 kg gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de 12800 km de radio.

a) Explicar las variaciones de energía cinética y potencial del satélite desde su lanzamiento en la superficie terrestre hasta que alcanzó su órbita y calcular el trabajo realizado.

b) ¿Qué variación ha experimentado el peso del satélite respecto del que tenía en la superficie terrestre?

Datos : G = 6,67 · 10^{-11} N m^2 kg^{-2} ; RT = 6400 km ; MT = 6 · 10^{24} kg

4.- b) Antes del lanzamiento, en la superficie de la Tierra el satélite solo tenía energía cinética debido a la posición que ocupaba. En el momento del lanzamiento se le comunica una energía cinética, que sumada a la potencial inicial da como resultado el valor de la energía total en la órbita.

La energía en la superficie de la Tierra es:

$$E_p = G\frac{M_T m}{R_T}$$

La energía de un cuerpo en una órbita es la suma de la energía potencial y la cinética.

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{r}$$

Igualando la fuerza centrípeta a la de gravitación obtenemos el valor de la velocidad en una órbita.

$$F_G = F_c \qquad G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}; \qquad v_O = \sqrt{G\frac{M_T}{r}}$$

Sustituyendo:

$$E = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} - G\frac{Mm}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}$$

Para ponerlo en órbita, la energía inicial más la energía cinética aplicada debe ser igual a la energía final.

$$E_{c0} + E_{p0} = E_{cf} + E_{pf}; \qquad E_{c0} - G\frac{M_T m}{R_T} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r}$$

Por tanto la energía de satelización es:

$$E_{c0} = GM_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right)$$

El trabajo necesario para colocarlo en órbita lo podemos calcular a partir del teorema de las fuerzas vivas como:

$$T = \Delta E_c = E_{cf} - E_{c0} = \frac{GM_T m}{2r} - \frac{GM_T m}{R_T} + \frac{GM_T m}{2r} = GM_T m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_T}\right) = -3{,}12{\cdot}10^{12}\ \mathrm{J}$$

El trabajo es negativo, porque hay que realizarlo en contra de las fuerzas del campo.

b) El peso del satélite en la Tierra era:

$$P = G\frac{M_T m}{R_T{}^2} = 9771\,\mathrm{N}$$

El peso en la órbita es:

$$P_O = G\frac{M_T m}{r^2} = 2443\,\mathrm{N}$$

6.- Para un satélite terrestre, una órbita geoestacionaria es aquella para la cual el período es el mismo que el período de giro de la Tierra sobre sí misma (24 horas)

a) Calcular el radio de una órbita circular geoestacionaria.

b) Desde una estación espacial en órbita geoestacionaria se quiere lanzar un cohete que escape a la atracción gravitatoria terrestre. Comparar la velocidad de escape desde esa órbita con la correspondiente en la superficie terrestre.

Datos: RT ; MT ; G

a) Para que un satélite de masa m esté en orbita circular estable alrededor de la Tierra, la fuerza de atracción gravitatoria ha de ser igual a la fuerza centrípeta necesaria para conservarlo en esa órbita:

$$\frac{m \cdot v^2}{R} = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$$

Como $v = \dfrac{2\pi R}{T}$, sustituyendo en la ecuación anterior y despejando el radio R:

$$R = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{(2\pi)^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} . (24 \cdot 60 \cdot 60)^2}{(2 \cdot \pi)^2}} = \mathbf{4{,}23 \cdot 10^4 Km}$$

b) La velocidad de escape viene dada por la siguiente expresión:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}}$$

Para el caso de un cohete situado en la estación espacial de la órbita geoestacionaria:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{4{,}23 \cdot 10^7}} = 4349{,}94\, m/s = \mathbf{4{,}25 Km/s}$$

Para el caso de un cohete situado en la superficie terrestre la velocidad de escape será mayor:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6370000}} = 11209{,}43\, m/s = \mathbf{11{,}2 Km/s}$$