VIBRACIONES Y ONDAS (I) - Movimiento Armónico Simple

1.- Cinemática del M.A.S.

Un Movimiento Armónico Simple es un movimiento vibratorio u oscilatorio que se produce en una sóla dimensión (por ejemplo la oscilación de una masa sujeta al extremo de un muelle) y en cual la distancia al origen (o punto de equilibrio) viene dada por una ecuación de la forma:

$$\boxed{x = A\ \mathrm{sen}(\omega\, t + \varphi_0)}$$ *Ecuación de la elongación (posición)*

Decimos que una partícula que se mueve siguiendo la ley anterior es un *oscilador armónico simple*

En la ecuación de la posición se distinguen los siguientes términos:

- x : es la *elongación* , o distancia al punto de equilibrio
- A : es la *amplitud* , o elongación máxima
- ω: es la *pulsación o frecuencia angular* y está relacionada con el *período* y la *frecuencia* a través de unas expresiones análogas a las del movimiento circular uniforme, es decir:
  $\omega = 2\pi f = 2\pi / T$
- *($\omega t + \varphi_0$)* es la *fase* y φ_0 es la *fase inicial*

*La ecuación de la elongación puede escribirse también **en función del coseno** (sólo cambiaría la fase inicial ya que ambas funciones tienen igual comportamiento, salvo una diferencia de fase de $\pi/2$)*

Las ecuaciones de la velocidad y de la aceleración se obtienen de la anterior por derivación:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = v = \omega\, A\, \cos(\omega\, t + \varphi_0)}$$ *Ecuación de la velocidad*

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = a = -\omega^2 A\ \mathrm{sen}(\omega\, t + \varphi_0)}$$ *Ecuación de la aceleración*

Es interesante observar que la elongación, la velocidad y la aceleración están relacionadas por unas *ecuaciones en las que no aparece el tiempo*:

$$\boxed{v^2 = \omega^2 (A^2 - x^2) \quad \text{o bien:} \quad v = \pm\,\omega\sqrt{A^2 - x^2}} \quad \text{y} \quad \boxed{a = -\omega^2 x}$$

2.- Dinámica del M.A.S.

A partir de la 2ª Ley de Newton se deduce que la fuerza a la que está sometida una partícula que se mueve con Movimiento Armónico Simple es:

$$\boxed{F = m\, a \Rightarrow F = -m\,\omega^2 x = -k\ x} \quad \text{con} \quad \boxed{k = m\,\omega^2}$$ y se mide en *N/m*

(donde *m* es la masa del oscilador y *K* es una constante propia de cada oscilador)

La pulsación y por lo tanto el período y la frecuencia del movimiento, dependen sólo de la masa y de la constante del oscilador:

$$\boxed{m\,\omega^2 = k \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

La fuerza tiene sentido opuesto a la elongación, es decir : es una *fuerza recuperadora*

Observación: Cualquier partícula de masa m sometida sólo a la acción de una fuerza recuperadora del tipo F = -k x se moverá con M.A.S. , siendo su frecuencia natural de oscilación: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

3.- Energía del oscilador armónico

Puede demostrarse que la fuerza que genera el movimiento armónico simple (y en general cualquier fuerza directamente proporcional a la posición) *es una fuerza conservativa*.

El que la fuerza sea conservativa implica que se puede definir una ***energía potencial*** para el oscilador armónico simple, dicha energía potencial vendrá dada por:

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}\, k\, x^2} \quad (J)$$

ecuación que puede obtenerse recordando la relación entre Fuerza y Energía potencial (*), y tomando como origen para la energía potencial el punto de equilibrio (suponiendo $E_p = 0$ en $x_0 = 0$)
(*) *Fuerza conservativa* :

$$\boxed{F = -k\, x = -\frac{dE_p}{dx} \Rightarrow -\int_{E_0}^{E_p} dE_p = \int_{x_0}^{x} (-k\, x)\, dx \Rightarrow E_p - E_0 = \frac{1}{2}\,(x^2 - x_0^2)}$$

La ***energía cinética*** se define y se obtiene de igual forma en todos los casos, sea cual sea el tipo de movimiento:

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}\, m\, v^2 = \frac{1}{2}\, m\, \omega^2 (A^2 - x^2) = \frac{1}{2}\, k\, (A^2 - x^2)} \quad (J)$$

La ***energía mecánica total***, suma de potencial y cinética, suponiendo que el oscilador está sometido sólo a la fuerza que origina el M.A.S., viene dada por:

$$\boxed{E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2}\, k\, A^2} \quad (J)$$

*** Ejercicio 1** : Demostrar la ecuación que relaciona elongación y velocidad en el MAS (partir de las ecuaciones de **x** y de **v**, elevar al cuadrado y aplicar el teorema fundamental de la trigonometría)*

$$\boxed{v = \pm\, \omega \sqrt{A^2 - x^2}}$$

Demostración:

$$v^2 = \omega^2 A^2 \cos^2(\omega\, t + \varphi_0) = \omega^2 A^2 (1 - \operatorname{sen}^2(\omega\, t + \varphi_0)) = \omega^2 A^2 - \omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2(\omega\, t + \varphi_0)$$

$$x^2 = A^2 \operatorname{sen}^2(\omega\, t + \varphi_0) \Rightarrow \omega^2 . x^2 = \omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2(\omega\, t + \varphi_0)$$

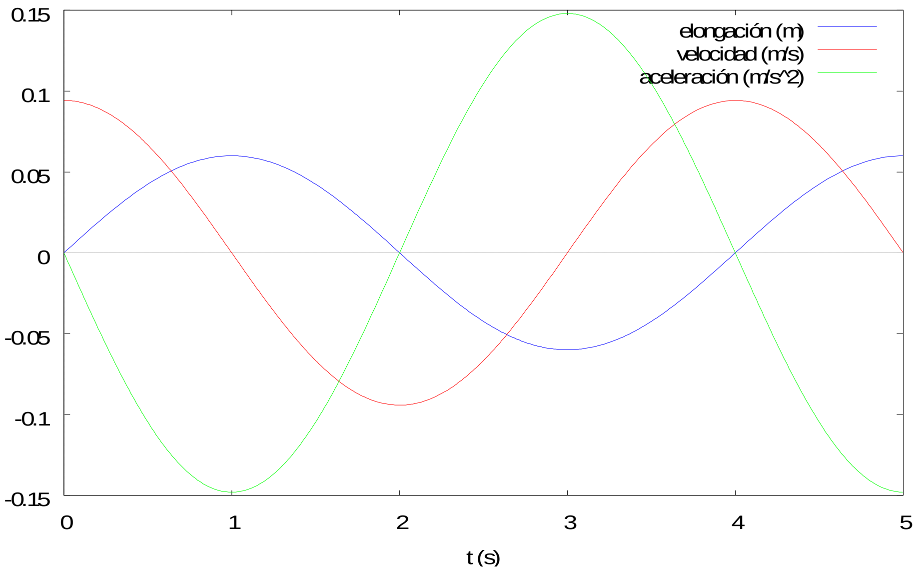
$$\text{sumando ambas expresiones queda} : v^2 + x^2 = \omega^2 A^2 \Rightarrow v = \pm\, \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

*** Ejercicio 2** : Demostrar que la energía mecánica en el MAS es constante (Ecuación de la E. total)*

(Simplemente se sustituye $v^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)$ en $E_c = \frac{1}{2} m.v^2$, se suman $E_c + E_p$ y se simplifica el resultado)

**** Ejercicio 3** : Representar las gráficas de la elongación la velocidad y la aceleración del oscilador cuya ecuación es la siguiente:*

$$\boxed{x = 6.10^{-2}\, sen(\omega\, t)} \;\; (\, m\,) \quad con\ \omega = \pi/2\ rad/s$$

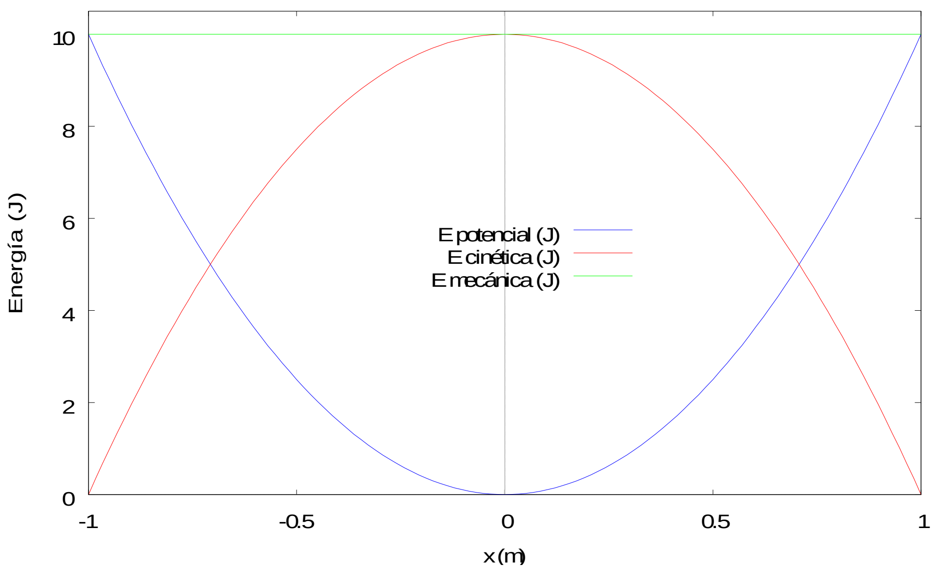


Observación: La elongación y la aceleración se anulan en el punto de equilibrio, mientras que la velocidad alcanza el valor máximo (con diferente signo en cada paso) en dicho punto. Además, la elongación y la aceleración alcanzan sus respectivos máximos (de signo opuesto) en los extremos de la oscilación, anulándose la velocidad en dichos extremos.

x (elongación)	***v (velocidad)***	***a (aceleración)***
0	v_{MAX} (+, -)	0
+ A	0	$- a_{MAX} = - \omega^2 A$
- A	0	$+ a_{MAX} = \omega^2 A$

**** Ejercicio 4** : Representar las curvas de Energía potencial, cinética y total en función de la elongación*

Las gráficas pedidas, tomando por ejemplo: *k = 20 N/m y A = 1 m*, son las siguientes :



**** Ejercicio 5** : Disponemos de un muelle del cual hemos comprobado que se alarga 2,5 cm respecto a su posición de equilibrio cuando se le aplica una fuerza de 0,75 N.*

a) Determinar la constante elástica de dicho muelle.

Si unimos al muelle anterior un cuerpo de masa 1,5 kg se constituye un sistema elástico que se deja oscilar libremente sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Sabiendo que en t = 0 el cuerpo se encuentra en la posición de máximo desplazamiento, x = 30 cm, respecto a su posición de equilibrio, determinar :

b) La expresión matemática del desplazamiento del cuerpo en función del tiempo.
c) La velocidad y la aceleración máximas del cuerpo.
d) Las energías cinética y potencial cuando el cuerpo se encuentra a 15 cm de la posición de equilibrio.

a) La constante elástica se obtiene de $F_r = -k\,x$, siendo *x* el alargamiento del muelle desde la posición de equilibrio y F_r la fuerza recuperadora que opone el muelle ante dicho alargamiento y que, lógicamente, es la opuesta de la fuerza aplicada. Es decir :

$$F_r = -F_a = -k\ x \ \Rightarrow\ k = \frac{F_a}{x} = \frac{0{,}75\,N}{0{,}025\,m} = 30\ N/m$$

b) La amplitud del movimiento es el máximo valor del desplazamiento, o sea : *A = 30 cm = 0,3 m*

La frecuencia angular se calcula a partir de la masa y de la constante elástica :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{30\ N.m^{-1}}{1{,}5\,kg}} = \sqrt{20}\ s^{-1} = 2\sqrt{5}\ s^{-1}$$

La ecuación del desplazamiento o elongación será de la forma :

$$x(t) = 0{,}3\ sen(2\sqrt{5}\ t + \varphi_0)\ \ (m) \quad \text{con la condición inicial :} \quad x(0) = 0{,}3\,m \quad para \quad t = 0\ s$$

Sustituyendo los valores iniciales, tendremos :

$$x(0) = 0{,}3\ sen(\varphi_0) = 0{,}3 \ \Rightarrow\ sen(\varphi_0) = 1 \ \Rightarrow\ \varphi_0 = \pi/2$$

con lo que la ecuación completa será : $\boxed{x(t) = 0{,}3\ sen(2\sqrt{5}\ t + \pi/2)\ \ (m)}$

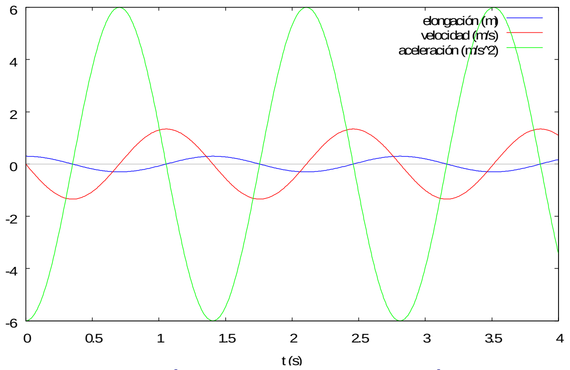
c) Los valores máximos (absolutos) de la velocidad y la aceleración serán:

$$|v_{max}| = A\ \omega = 0{,}6\sqrt{5}\ m.s^{-1} = 1{,}34\ m.s^{-1} \quad , \quad |a_{max}| = A\ \omega^2 = 6\ m.s^{-2}$$

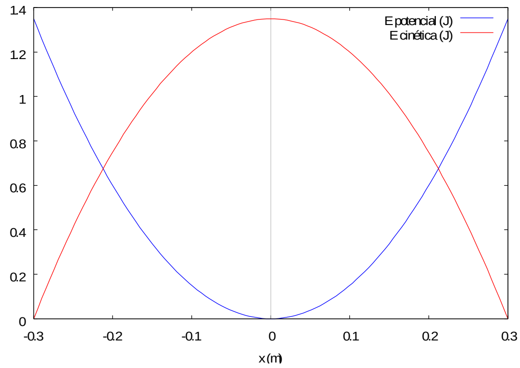
d) Ambas energías se calculan en función de la elongación, para el caso : *x = 15 cm = 0,15 m*

$$E_c = \frac{1}{2}\ k(A^2 - x^2) = 1{,}0125\ J \quad , \quad E_p = \frac{1}{2}\ k\ x^2 = 0{,}3375\ J$$

Ampliación : gráficas del movimiento y curvas de energía



(elongación, velocidad y aceleración)



(Energías cinética y potencial)